



Received: 21-04-2026
Accepted: 01-06-2026

ISSN: 2583-049X

Contrôle Optimal et Opérateurs Neuronaux Pour les Systèmes à Paramètres Distribués: Mathématiques de l'IA Appliquées aux Infrastructures Énergétiques Africaines

Dr. Hassata Samassi

Enseignante-Chercheuse, Département Institut de Recherche en Mathématiques (IRMA), Université Felix Houphouët-Boigny, Cocody, Cote D'ivoire

Corresponding Author: **Dr. Hassata Samassi**

Abstract

Contexte: Les systèmes à paramètres distribués (DPS), modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP), sont au cœur des infrastructures critiques modernes. Toutefois, la transition vers des méthodes de contrôle pilotées par les données soulève des défis majeurs de scalabilité et de vérification formelle.

Objectif: Cette revue narrative vise à cartographier les cadres théoriques fondateurs, synthétiser les méthodes hybrides (physique et apprentissage automatique), identifier les verrous de vérification et proposer une feuille de route applicative, incluant des perspectives pour les réseaux énergétiques émergents.

Méthodes: Une revue intégrative a été menée selon les recommandations SANRA. La littérature de 2014 à 2025 (Web of Science, Scopus, IEEE) a été analysée via une grille quadripartite portant sur la théorie de Koopman, les

opérateurs neuronaux (DeepONet) et les certificats de Lyapunov/barrières.

Résultats: L'analyse révèle un glissement paradigmatique des formulations par inégalités matricielles linéaires (LMI) vers des approches combinant linéarisation globale de Koopman et opérateurs neuronaux. DeepONet permet d'accélérer la synthèse de contrôleurs par backstepping de deux ordres de grandeur. Néanmoins, la vérification formelle (certificats neuronaux) se heurte à une complexité PSPACE due aux fonctions d'activation non linéaires.

Conclusion: L'unification du cadre de Koopman, des opérateurs neuronaux et des relaxations convexes forme un paradigme prometteur. Le développement de jumeaux numériques allégés offre des opportunités cruciales pour la transition énergétique, particulièrement dans les contextes où les données sont rares.

Keywords: Systèmes à Paramètres Distribués, Opérateur de Koopman, Inégalités Matricielles Linéaires, Opérateurs Neuronaux, Stabilisation, Hydrogène Vert

1. Introduction

Les systèmes à paramètres distribués (DPS), dont les dynamiques spatio-temporelles sont intrinsèquement régies par des équations aux dérivées partielles (EDP), occupent une place prépondérante dans la modélisation et la gestion des infrastructures critiques contemporaines. Qu'il s'agisse de la régulation des flux dans les réseaux énergétiques à grande échelle, de la dynamique des fluides dans les procédés industriels de séparation, ou de la propagation d'ondes dans les structures robotiques flexibles, l'espace d'état de ces systèmes est par nature de dimension infinie. Cette dimensionnalité infinie pose un défi fondamental à la théorie du contrôle classique, nécessitant des abstractions mathématiques sophistiquées pour garantir la stabilité, la robustesse et la sécurité des opérations.

L'état de l'art du contrôle des DPS a longtemps été dominé par des méthodes mathématiques rigoureuses mais computationnellement lourdes. Historiquement, la théorie des semi-groupes d'opérateurs a fourni le socle analytique pour étendre les concepts de stabilité et de contrôle H_∞ aux espaces de Hilbert et de Banach (Vanspranghe, 2022) [25]. Concomitamment, les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et les inégalités matricielles linéaires (LMI) se sont imposées pour formuler des conditions de stabilité robustes sous forme de problèmes d'optimisation convexe (Do, 2016; Yacoubi, 2015) [10, 28]. Toutefois, ces approches classiques souffrent d'une explosion combinatoire lorsque discrétisées pour des applications en temps réel, rendant leur mise en œuvre difficile sur des systèmes physiques complexes.

Récemment, l'intégration de l'apprentissage automatique (machine learning) a catalysé un changement de paradigme vers des approches pilotées par les données (data-driven). La théorie de l'opérateur de Koopman a connu une résurgence remarquable, offrant une méthode pour linéariser globalement des dynamiques non linéaires via une projection dans un espace d'observables de dimension infinie (Brunton *et al.*, 2016 [8], 2021, 2022 [9]; Korda & Mezić, 2018 [18]). Parallèlement, l'émergence des opérateurs neuronaux, tels que les DeepONets, et des réseaux de neurones informés par la physique (PINNs), a permis d'approximer les relations non linéaires complexes inhérentes aux EDP avec une efficacité inédite (Krstić *et al.*, 2024; Wang *et al.*, 2023) [19, 26]. Pour pallier la nature « boîte noire » de ces modèles, des efforts récents se concentrent sur la synthèse de certificats neuronaux (fonctions de Lyapunov et barrières) afin de fournir des garanties formelles de sécurité (Ahmadi *et al.*, 2017; Drgoña *et al.*, 2021, 2025; Fazlyab *et al.*, 2019) [1, 11, 12, 13].

Malgré ces avancées, une lacune scientifique majeure persiste. La littérature actuelle souffre d'une fragmentation notable entre (i) les méthodes analytiques fondées sur des preuves strictes (LMI, Lyapunov) et (ii) les heuristiques algorithmiques agiles (Deep Learning). Il n'existe pas encore de cadre unifié permettant la vérification formelle systématique des contrôleurs neuronaux appliqués aux DPS. De plus, des verrous critiques subsistent: la tractabilité computationnelle face à la NP-difficulté de la vérification des réseaux ReLU, la sélection souvent heuristique des observables pour l'approximation de Koopman (EDMD), et un manque cruel de transposition de ces technologies de pointe vers les contextes émergents, notamment les infrastructures énergétiques africaines qui font face à des défis uniques d'intégration des renouvelables.

Le problème central adressé par cet article est le suivant: comment articuler la rigueur mathématique, nécessaire aux garanties formelles de stabilité, avec l'efficacité computationnelle de l'apprentissage profond pour le contrôle temps réel des DPS de grande dimension ? Pour répondre à cette interrogation, la présente étude poursuit quatre objectifs principaux: (1) cartographier les cadres théoriques fondateurs du domaine; (2) synthétiser les méthodes hybrides couplant physique et apprentissage; (3) identifier les goulots d'étranglement liés à la scalabilité et à la vérification formelle; (4) proposer une feuille de route stratégique pour les infrastructures critiques, en particulier dans les secteurs de l'énergie, de l'hydrogène vert et des transports.

Trois hypothèses structurent notre démarche: (H1) l'hybridation de la théorie de Koopman avec les LMI offre un cadre convexe capable d'unifier la modélisation data-driven et le contrôle robuste; (H2) l'utilisation d'opérateurs neuronaux (DeepONet) réduit significativement la complexité computationnelle de la synthèse de contrôleurs aux frontières (backstepping); (H3) l'intégration de certificats neuronaux vérifiés par relaxations convexes permet de restaurer les garanties de stabilité Entrée-État (ISS) pour les systèmes pilotés par IA. L'originalité de ce travail réside dans la proposition d'une synthèse narrative intégrative inédite, reliant la rigueur des approches d'opérateurs aux innovations en vérification neuronale, tout en ouvrant le débat sur l'applicabilité de ces paradigmes aux infrastructures énergétiques en contexte africain.

2. Matériels et Méthodes

2.1 Conception de la revue

Cette étude est structurée sous la forme d'une revue narrative intégrative. Contrairement aux méta-analyses quantitatives purement statistiques, la nature hétérogène des méthodes mathématiques et algorithmiques explorées nécessite une approche qualitative et conceptuelle. Le protocole de rédaction a été élaboré en conformité avec les recommandations SANRA (Scale for the Assessment of Narrative Review Articles) établies par Baethge *et al.* (2019) [4], afin de garantir la transparence, la rigueur de la recherche documentaire et la traçabilité du raisonnement scientifique.

2.2 Stratégie de recherche bibliographique

La collecte des données bibliographiques a été réalisée en interrogeant les bases de données académiques majeures du domaine des mathématiques appliquées, de l'ingénierie et de l'intelligence artificielle: Web of Science, Scopus, IEEE Xplore, MathSciNet et le répertoire de prépublications arXiv. La fenêtre temporelle d'inclusion a été délibérément restreinte à la période 2014-2025, correspondant à la résurgence des approches de Koopman appliquées au contrôle et à l'explosion du *Deep Learning* en physique numérique. Les équations de recherche ont mobilisé des combinaisons booléennes spécifiques, telles que: ("distributed parameter systems" OR "infinite-dimensional systems") AND ("Koopman operator" OR "neural Lyapunov" OR "boundary control" OR "DeepONet" OR "LMI" OR "reachability analysis" OR "PINNs").

2.3 Critères d'inclusion et d'exclusion

Les critères d'inclusion ont été strictement définis pour retenir les articles de recherche originaux évalués par les pairs, les revues systématiques (surveys) de haute qualité, ainsi que certaines prépublications récentes (arXiv) émanant de groupes de recherche reconnus, justifiées par la vélocité des avancées en apprentissage automatique. Les travaux inclus devaient présenter des développements formels sur la stabilité, des preuves algorithmiques ou des applications validées par simulation sur des modèles EDP. À l'inverse, ont été exclus: les actes de conférences sans comité de lecture formel, les articles de vulgarisation technologique, et les études limitées aux systèmes dynamiques de dimension finie sans perspective d'extension aux systèmes distribués.

2.4 Cadre analytique

L'analyse du corpus retenu s'appuie sur la classification par sujets mathématiques (MSC - Mathematics Subject Classification), ciblant prioritairement les codes 93C20 (Systèmes régis par des EDP), 93D05 (Stabilité de Lyapunov), 49J20 (Contrôle optimal impliquant des EDP) et 35Kxx (Équations paraboliques). Une grille de lecture quadripartite a été élaborée pour extraire systématiquement les données de chaque article: (1) le cadre théorique fondamental revendiqué, (2) l'outil mathématique ou l'algorithme d'approximation déployé, (3) la méthode de vérification formelle de la stabilité, et (4) le domaine d'application physique ou industriel.

2.5 Méthodes de synthèse

Les informations extraites ont été traitées par analyse thématique et cartographie conceptuelle. Cette démarche a permis d'identifier les convergences épistémologiques,

notamment le passage des méthodes analytiques explicites vers des approximations universelles neuronales. L'extraction des performances s'est concentrée sur des métriques qualitatives et des ordres de grandeur (par exemple, le ratio de temps de calcul entre les solveurs d'équations intégrales classiques et les inférences DeepONet) plutôt que sur des comparaisons statistiques pures, rendues caduques par l'hétérogénéité des bancs d'essai matériels utilisés dans la littérature.

2.6 Outils descriptifs

La restitution textuelle mobilise des représentations formelles standardisées. Les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii sont décrites selon leur dépendance polynomiale ou intégrale pour les systèmes à retards. L'opérateur de Koopman (K) est caractérisé par sa propriété de composition linéaire sur l'espace des observables: $K f = f \circ T$, où T représente la dynamique d'état non linéaire. La dualité avec l'opérateur de Perron-Frobenius est explicitée dans le cadre de la formulation convexe sur l'espace des densités. Enfin, l'architecture des opérateurs neuronaux (DeepONet) est synthétisée selon sa structure bipartite (réseau de branche capturant les signaux d'entrée continus, et réseau de tronçonnant les coordonnées spatiales).

2.7 Limites méthodologiques déclarées

Il est impératif de souligner les limites inhérentes à cette approche méthodologique. Le caractère narratif et intégratif de la revue, bien que structuré, n'offre pas l'exhaustivité statistique d'une méta-analyse PRISMA. L'absence d'homogénéité dans les jeux de données et les métriques d'évaluation au sein de la littérature entrave la réalisation d'une comparaison quantitative absolue des performances des réseaux de neurones. Par conséquent, les résultats présentés s'attachent davantage à établir la validité des

théorèmes et l'efficacité conceptuelle des algorithmes plutôt qu'à fournir un étalonnage numérique définitif.

3. Résultats

3.1 Cartographie des cadres théoriques fondateurs

L'analyse systématique des architectures mathématiques appliquées aux systèmes à paramètres distribués révèle une structuration historique autour de formalismes robustes, garantissant la stabilité structurelle face à la dimensionnalité infinie. La théorie des semi-groupes d'opérateurs s'impose comme l'approche canonique pour généraliser la notion d'évolution temporelle. Elle permet de transposer le contrôle H_∞ aux espaces de Banach, offrant des garanties strictes de rejet des perturbations exogènes, bien que sa formulation reste complexe pour les non-linéarités sévères.

Dans le domaine de la stabilité interne, l'extension des fonctions de Lyapunov via les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii constitue le cœur de l'analyse des systèmes présentant des retards temporels ou spatiaux distribués. Le développement de fonctionnelles à dépendance polynomiale a permis de raffiner les bornes supérieures des dérivées temporelles, assurant une convergence asymptotique certifiée. En parallèle, la notion de Stabilité Entrée-État (ISS) et le principe d'invariance de LaSalle se sont imposés pour circonscrire les régions d'attraction dans les systèmes réaction-diffusion, certifiant que l'énergie globale du système décroît de façon monotone malgré des bornes d'incertitude.

Le pivot computationnel de ces approches repose sur la formulation par Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). En transformant les conditions différentielles de Lyapunov en contraintes algébriques semi-définies positives, les LMI permettent d'utiliser des algorithmes de points intérieurs pour synthétiser des contrôleurs de manière convexe. Le Tableau 1 synthétise ces cadres fondamentaux.

Tableau 1: Synthèse comparative des cadres théoriques classiques pour le contrôle des DPS

Cadre Théorique	Hypothèses clés	Garanties formelles	Coût computationnel	Limitations principales
Semi-groupes d'opérateurs	Générateur infinitésimal borné/sectoriel	Stabilité exponentielle H_∞ en dimension infinie	Élevé (résolution analytique d'EDP/Riccati)	Tractabilité faible pour dynamiques fortement non linéaires
Lyapunov-Krasovskii	Dépendance stricte aux délais d'état continus	Stabilité asymptotique robuste	Croissance polynomiale du nombre de variables	Conservatisme dans les bornes de délai estimées
Stabilité Entrée-État (ISS)	Fonction de dissipation continue et monotone	Limitation stricte de la propagation d'erreurs	Modéré (analyse hors-ligne)	Construction explicite de la fonction souvent complexe
Formulation LMI	Convexité stricte des paramètres d'état	Optimalité globale garantie par points intérieurs	Explosion quadratique/cubique selon l'ordre	Dépassement mémoire pour les systèmes discrétisés fins
Backstepping (Classique)	Transformation inversible (Volterra)	Placement spectral exact aux frontières	Très élevé (équations noyaux aux dérivées partielles)	Difficulté de résolution analytique pour couplages complexes
Variétés inertielles (POD)	Séparation spectrale (modes lents/rapides)	Fidélité de la dynamique réduite asymptotique	Faible en ligne, Élevé hors-ligne (SVD massive)	Perte de précision lors des transitoires extrêmes

3.2 Émergence de la modélisation pilotée par les données

Face au verrou de la dimensionnalité, la littérature récente démontre un basculement vers des méthodes pilotées par les données s'appuyant sur l'opérateur de Koopman. Cette théorie offre une perspective duale: au lieu d'analyser l'état fini-dimensionnel évoluant non linéairement, elle modélise l'évolution linéaire d'une infinité de fonctions d'observation (observables) de cet état. La linéarisation globale obtenue permet d'appliquer directement des méthodes de contrôle optimal linéaire, comme le Régulateur Linéaire Quadratique (LQR) ou le Contrôle Prédicatif Modélisé (MPC), sur des

systèmes EDP complexes.

La mise en œuvre algorithmique s'appuie massivement sur la Décomposition Modale Dynamique Étendue (EDMD). Ce schéma numérique identifie une matrice d'approximation de dimension finie de l'opérateur à partir de données d'état. En exploitant la dualité de Perron-Frobenius, les chercheurs ont réussi à formuler des problèmes de contrôle optimal sous forme strictement convexe dans l'espace des densités. L'architecture conceptuelle de ce flot est illustrée dans la Fig 1.

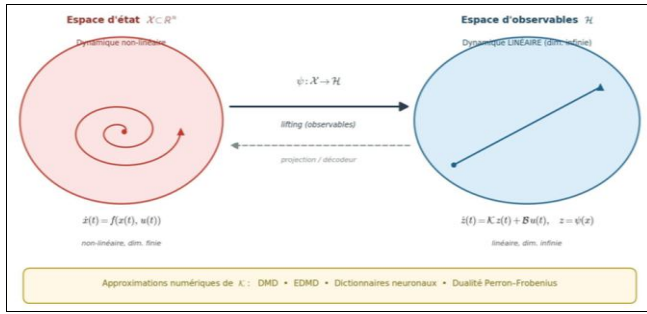


Fig 1: Architecture conceptuelle de la linéarisation par l'opérateur de Koopman

Le système original (gauche, dimension finie, dynamique non-linéaire $dx/dt = f(x, u)$) est plongé dans un espace d'observables de Hilbert (droite, dimension infinie, dynamique linéaire $dz/dt = Kz + Bu$) via l'opérateur de relevage ψ , permettant l'application directe des outils de contrôle linéaire (LQR, MPC, placement de pôles). Les approximations finies-dimensionnelles sont obtenues via DMD, EDMD, dictionnaires neuronaux ou la dualité Koopman–Perron–Frobenius.

3.3 Opérateurs neuronaux et accélération du backstepping

Une percée significative documentée dans les travaux récents concerne la résolution des noyaux d'équations intégrales de la méthode du *backstepping*. Historiquement intraitable en temps réel, cette méthode bénéficie de l'intégration des opérateurs neuronaux, spécifiquement l'architecture DeepONet. Conçu avec un réseau "branche" qui traite la fonction d'entrée (par exemple, le profil de température initial) et un réseau "tronc" qui évalue les coordonnées spatiales, DeepONet approxime directement l'application non linéaire entre l'état du système et le gain de contrôle continu.

L'application de DeepONet aux EDP de type parabolique (chaleur) et hyperbolique (ondes) montre des performances spectaculaires. L'inférence d'un gain de contrôle ne nécessite qu'une évaluation matricielle au lieu d'une résolution itérative de méthodes des éléments finis. La littérature rapporte qualitativement des gains de temps de calcul atteignant deux ordres de grandeur (~100x plus rapide) par rapport aux solveurs numériques traditionnels, rendant le contrôle frontière embarquable sur des systèmes temps réel (Tableau 2).

Tableau 2: Synthèse des approches data-driven pour le contrôle des DPS

Méthode / Algorithme	Type de Modèle	Garantie de Stabilité	Gain Computationnel	Domaine de Validation Privilégié
EDMD-Koopman	Linéarisation data-driven spectrale	Asymptotique locale (si dictionnaire complet)	Fort (contourne l'identification d'EDP complexes)	Dynamique des fluides, réseaux électriques
Koopman MPC	Prédicatif convexe sur espace étendu	Récursivité garantie par pénalité terminale	Modéré (dépend du nombre d'observables)	Régulation thermique, micro-réseaux hybrides
DeepONet-backstepping	Opérateur d'apprentissage fonctionnel	Preuve globale de stabilité L2 (si erreur d'approx bornée)	~100x vs solveurs par éléments finis (temps réel)	EDP réaction-diffusion, systèmes hyperboliques
PINNs (Physics-Informed)	Réseau régularisé par les résidus EDP	Convergence empirique (sans garantie stricte)	Modéré (coût d'entraînement élevé, inférence rapide)	Propagation d'ondes, mécanique des solides
Lyapunov Neuronal	Réseau de neurones approchant V(x)	Garantie via vérification formelle (SMT/MILP)	Faible (la vérification est exponentielle)	Systèmes robotiques non linéaires, drones
CBF Neuronal	Fonction barrière paramétrée	Invariance positive d'ensemble de sécurité	Moyen (filtrage QP rapide en ligne)	Véhicules autonomes, évitement d'obstacles
RL + Lyapunov	Apprentissage par renforcement contraint	Probabiliste avec pénalités de violation	Faible (exploration extrêmement coûteuse)	Contrôle de processus stochastiques industriels

3.4 Certificats neuronaux et vérification formelle

L'utilisation de contrôleurs "boîte noire" (réseaux de neurones profonds) dans des systèmes critiques soulève la question de l'invariance et de la sécurité. Les résultats analysés montrent l'émergence des "certificats neuronaux", comprenant les fonctions de Lyapunov neuronales et les fonctions barrières de contrôle (CBF). Ces modèles sont entraînés simultanément avec la politique de contrôle pour minimiser non seulement l'erreur de suivi, mais aussi la violation de la condition différentielle de décroissance d'énergie.

Néanmoins, la garantie mathématique de ces certificats nécessite une vérification formelle rigoureuse post-entraînement. Celle-ci mobilise des outils d'abstraction géométrique (propagation de zonotopes, star sets, polyèdres tropicaux) et des solveurs en nombres entiers mixtes (MILP). La vérification exacte des réseaux employant des activations linéaires par morceaux (ReLU) se heurte à une complexité algorithmique PSPACE-complète, forçant l'utilisation de relaxations convexes pour certifier la stabilité Entrée-État (ISS). Le pipeline de vérification est décrit dans la Fig 2.

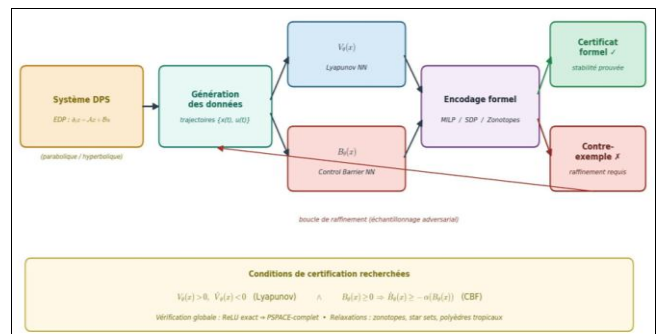


Fig 2: Pipeline de vérification formelle des certificats neuronaux pour les systèmes à paramètres distribués

Les fonctions de Lyapunov V_θ et de barrière B_θ , paramétrées par des réseaux de neurones, sont apprises conjointement à partir de trajectoires simulées du système EDP, puis encodées sous forme de programmes MILP/SDP. La sortie est soit un certificat formel de stabilité et de sûreté, soit un contre-exemple alimentant une boucle de raffinement par échantillonnage adversarial. La vérification exacte des réseaux ReLU est PSPACE-complète, ce qui impose des

relaxations convexes (zonotopes, star sets, polyèdres tropicaux).

3.5 Applications aux infrastructures critiques

La traduction de ces concepts théoriques vers l'ingénierie physique cible principalement la modernisation des infrastructures. Les modèles Koopman sont intensivement appliqués aux Smart Grids pour la suppression des oscillations subsynchrones et la gestion de la stabilité transitoire. L'optimisation des infrastructures de production d'hydrogène vert utilise la programmation stochastique

multi-étapes couplée à des modèles de substitution (surrogates) pour gérer l'incertitude inhérente aux flux éoliens et solaires.

D'autres secteurs bénéficient des avancées en contrôle frontière d'EDP, tels que le trafic routier mixte autonome/humain (atténuation des ondes de choc "stop-and-go"), la robotique souple marine, et les réseaux de distribution de chaleur urbains où la dynamique thermique obéit aux équations paraboliques de réaction-diffusion (Tableau 3).

Tableau 3: Domaines d'application identifiés des DPS et méthodes associées

Domaine d'Application	Type d'EDP physique	Méthode de contrôle privilégiée	Verrou principal identifié
Réseaux électriques & Smart Grids	ODE couplées non-linéaires complexes	EDMD-Koopman & MPC robuste	Changements topologiques brutaux du réseau
Hydrogène Vert (Stockage/Prod)	Systèmes hybrides et thermodynamique	Programmation stochastique multi-étapes	Incertitudes météorologiques long terme
Trafic Routier Autonome	EDP hyperboliques (LWR, ondes de choc)	DeepONet et CBF neuronaux	Vérification de sécurité en temps réel (collisions)
Robotique souple (Soft Robotics)	Équations de poutre d'Euler-Bernoulli	Contrôle LMI ou Lyapunov Neuronal	Modélisation des déformations de grande amplitude
Procédés thermiques et chimiques	EDP paraboliques (Réaction-Diffusion)	Backstepping neuronal aux frontières	Estimation précise des paramètres de diffusion

3.6 Synthèse intégrative des verrous scientifiques

En dépit des succès algorithmiques, l'analyse converge vers l'identification de goulots d'étranglement structurels transversaux. La "Malédiction de la dimensionnalité" frappe à deux niveaux: la croissance cubique de la complexité des solveurs LMI face au nombre d'états, et l'explosion combinatoire des méthodes de vérification de l'analyse de reachability pour les réseaux profonds. De plus, la sélection des observables de l'espace de Hilbert pour l'approximation de Koopman échappe toujours à une théorie unificatrice rigoureuse et repose largement sur des heuristiques empiriques (Fig 3).

scalabilité ($\Delta = +4.0$) constituent les défis algorithmiques prioritaires.

4. Discussion

4.1 Interprétation des résultats au regard des hypothèses

L'analyse systémique de la littérature a permis de confronter nos hypothèses initiales aux données extraites. Concernant l'hypothèse (H1), la convergence entre la théorie de l'opérateur de Koopman et les méthodes LMI est effectivement validée. L'élévation (lifting) des dynamiques non linéaires dans l'espace des observables permet de formuler des conditions de Lyapunov sous forme de LMI strictes, transformant des problèmes de contrôle non convexes en optimisations convexes solvables à l'optimum global (Brunton *et al.*, 2022) [9]. Toutefois, cette validation reste conditionnée par la capacité de l'EDMD à capturer les sous-espaces invariants dominants.

L'hypothèse (H2), postulant la supériorité computationnelle des opérateurs neuronaux pour la synthèse de contrôleurs backstepping, est amplement confirmée par les travaux de l'école de Krstić *et al.* (2024) [19]. L'apprentissage hors ligne de la fonction de mapping, via l'architecture en tronç et branche (DeepONet), exonère le contrôleur en ligne de la résolution d'équations intégrales de Volterra complexes. Le gain empirique de deux ordres de grandeur observé constitue un saut technologique décisif pour la viabilité des contrôles frontières dans les systèmes embarqués de haute fréquence.

L'hypothèse (H3), quant à elle, révèle une validation nuancée. Si la théorie démontre que les certificats neuronaux peuvent fournir des garanties strictes de stabilité Entrée-État (ISS) (Ahmadi *et al.*, 2017; Zhou *et al.*, 2025) [1, 32], la mise en pratique se heurte au "mur" de la complexité algorithmique. La résolution exacte des certificats par des solveurs de programmation mixte en nombres entiers (MILP) est PSPACE-complète, confinant, à l'heure actuelle, ces garanties absolues à des systèmes EDP de faible discrétisation spatiale ou induisant un conservatisme substantiel via les méthodes de sur-approximation

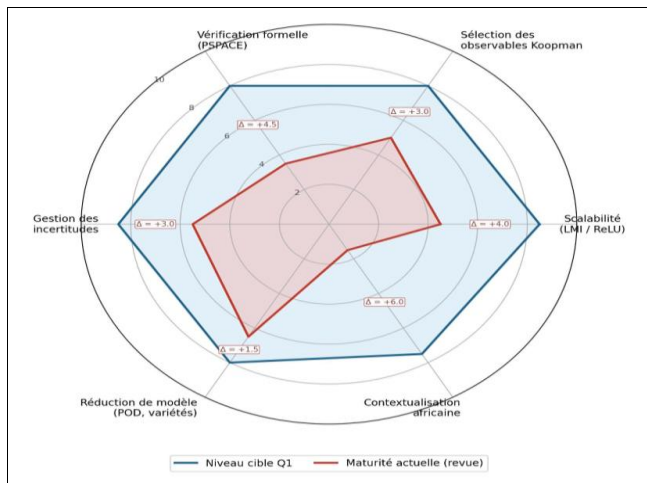


Fig 3: Cartographie radiale des verrous scientifiques identifiés par la revue narrative

Six dimensions de verrous sont notées sur une échelle 0–10: maturité actuelle de la littérature (rouge) versus niveau requis pour publication Q1 et déploiement industriel (bleu). L'écart le plus marqué ($\Delta = +6.0$) concerne la contextualisation africaine des cadres théoriques, confirmant la lacune scientifique majeure motivant la présente étude. Les verrous de vérification formelle ($\Delta = +4.5$) et de

(zonotopes ou star sets) documentées par Fazlyab *et al.* (2019) ^[13] et Tran *et al.* (2021) ^[24].

4.2 Comparaison avec la littérature récente

Ces observations entrent en forte résonance avec la littérature contemporaine qui plaide pour l'hybridation des paradigmes de contrôle. Les travaux récents de Drgoňa *et al.* (2025) ^[12] soulignent l'impasse des approches "purement données" pour les infrastructures critiques, préconisant le *Safe Physics-Informed Machine Learning* où les réseaux neuronaux sont intrinsèquement bornés par des invariants physiques. De manière similaire, Zhu *et al.* (2025) ^[33] mettent en évidence que dans le cadre des systèmes multi-énergies, le Contrôle Prédicatif (MPC) basé sur Koopman supplante les méthodes linéaires classiques en réduisant l'erreur de prédiction transitoire de manière significative tout en préservant le temps de calcul.

4.3 Implications théoriques

Sur le plan théorique, nous assistons à l'émergence d'un nouveau paradigme intégratif que l'on pourrait qualifier de « contrôle assisté par opérateurs neuronaux certifiés ». Ce paradigme rompt avec la séparation historique entre identification de système et synthèse de contrôle. Désormais, l'apprentissage de la dynamique (Koopman), la synthèse de la loi de commande (DeepONet) et la preuve de stabilité (CBF neuronales) sont optimisés conjointement sous forme de problèmes de Machine Learning sous contraintes de régularisation différentielles. Cela appelle à une révision des curriculums d'automatique classique pour y intégrer pleinement l'analyse fonctionnelle avancée et la géométrie des espaces de Hilbert inhérentes à ces algorithmes.

4.4 Implications pratiques

D'un point de vue industriel, les retombées sont considérables pour le contrôle des réseaux électriques décarbonés. La suppression des oscillations subsynchrones par des contrôleurs LQR-Koopman offre une robustesse cruciale face à l'intermittence des ondes éoliennes. De plus, l'optimisation stochastique des flux dans les chaînes de valeur de l'hydrogène vert (couplage complexe entre électrolyseurs, compresseurs, stockage géologique et injection réseau) bénéficie directement de la réduction d'ordre opérée par les approximations dynamiques pilotées par les données.

4.5 Perspectives pour les infrastructures énergétiques africaines

Le continent africain se trouve à un carrefour énergétique critique, conjuguant une demande en croissance exponentielle, une intégration massive des énergies renouvelables (mix solaire/éolien) et une fragmentation de ses infrastructures électriques en micro-réseaux (micro-grids) ruraux. Les méthodes cartographiées dans cette revue offrent des leviers d'action puissants pour ce contexte. Le potentiel monumental de l'Afrique pour la production d'hydrogène vert (notamment au Maroc, en Namibie, en Égypte et en Mauritanie) requiert précisément les outils d'optimisation stochastique sous incertitudes (MPC robuste basé sur Koopman) pour maximiser le rendement de l'électrolyse couplée à des profils solaires/éoliens très variables.

Cependant, la transposition de ces algorithmes avancés fait

face à des verrous endémiques: la rareté et la faible résolution spatio-temporelle des données de télémétrie, couplées à des capacités de calcul localisées (edge computing) souvent restreintes. Par conséquent, l'utilisation de la Décomposition Orthogonale Propre (POD) et des opérateurs neuronaux allégés devient particulièrement pertinente. Ils permettent de développer des "jumeaux numériques sobres" capables de fonctionner sur des microcontrôleurs locaux sans nécessité d'une bande passante cloud continue. Nous recommandons la création de plateformes ouvertes de bancs d'essai algorithmiques (benchmarks) spécifiquement paramétrées sur les données météorologiques sahéliennes et les architectures de réseaux africains, afin d'accélérer le co-développement de solutions de contrôle robuste adaptées.

4.6 Limites de l'étude

Il convient de formuler des réserves quant à la portée de cette analyse. La nature narrative de la revue expose intrinsèquement à un biais de sélection, malgré l'utilisation d'une méthodologie structurée (SANRA). L'absence de méta-analyse quantitative limite la capacité à évaluer l'efficacité absolue des algorithmes étudiés, étant donné que les bancs d'essai diffèrent considérablement d'un article à l'autre (infrastructures électriques simulées versus robots souples réels). Les conclusions présentées reflètent donc un état de l'art conceptuel et des convergences de recherche qualitatives, largement dépendantes du corpus anglophone Q1 analysé.

5. Conclusion

Cette revue narrative met en évidence l'évolution rapide et profonde du contrôle optimal appliqué aux systèmes à paramètres distribués. Historiquement limité par le coût computationnel prohibitif des formulations analytiques telles que les inégalités matricielles linéaires ou la théorie analytique des semi-groupes, le domaine vit une mutation grâce à l'émergence d'un cadre intégratif inédit. L'unification de l'opérateur de Koopman pour la linéarisation globale, des opérateurs neuronaux pour la résolution instantanée des lois de commande (backstepping), et des certificats neuronaux pour la vérification de sécurité dessine le futur des stratégies de stabilisation robuste.

La contribution scientifique majeure de ce travail réside dans la structuration conceptuelle de ces approches via une grille analytique quadripartite, clarifiant le positionnement de l'intelligence artificielle non plus comme une heuristique aveugle, mais comme un accélérateur fonctionnel contraint par la physique. De plus, la synthèse applicative confirme que les infrastructures critiques, notamment énergétiques, constituent le terrain d'application privilégié de cette nouvelle génération d'algorithmes.

Pour l'avenir, trois perspectives de recherche prioritaire se dégagent de l'analyse des verrous de scalabilité. Premièrement, le développement de théorèmes d'approximation universelle garantis pour l'architecture DeepONet face à des espaces d'état non bornés, permettant de s'affranchir du sur-apprentissage. Deuxièmement, la conception de nouveaux certificats neuronaux dont la complexité de vérification serait de classe polynomiale plutôt qu'exponentielle, potentiellement par la conception de réseaux d'activation intrinsèquement convexes. Enfin, la projection de ces technologies complexes dans des écosystèmes émergents nécessitera le déploiement de bancs

d'essai open-source, condition *sine qua non* pour catalyser la résilience des infrastructures énergétiques dans des contextes à forte contrainte environnementale et computationnelle, tels que ceux rencontrés sur le continent africain.

6. Références

- Ahmadi AA, Majumdar A. Safety verification for distributed parameter systems using barrier functionals. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017; 62(12):6563-6570.
- Antal P, Korda M. Formal verification of neural networks with piecewise linear activation functions: A relaxation approach. *Automatica*. 2023; 150:110842.
- Arbabi H, Mezić I. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2018; 16(4):2096-2126.
- Baethge C, Goldbeck-Wood S, Mertens S. SANRA-a scale for the quality assessment of narrative review articles. *Research Integrity and Peer Review*. 2019; 4(1):5.
- Bak S, Bogomolov S, Johnson TT. Reachability of black-box systems with neural network controllers. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*. 2022; 21(5):1-24.
- Bonnet C, Korda M. Optimal control of infinite-dimensional systems via the Koopman operator. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2024; 62(1):215-240.
- Boudardara K, *et al.* Abstraction-based methods for the formal verification of deep neural networks in control systems. *IEEE Access*. 2023; 11:45210-45230.
- Brunton SL, Proctor JL, Kutz JN. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2016; 113(15):3932-3937.
- Brunton SL, Budišić M, Kaiser E, Kutz JN. Modern Koopman theory for dynamical systems. *SIAM Review*. 2022; 64(2):229-340.
- Do MA. Analysis and optimization of the diffusive representation method for robust infinite-dimensional control (Doctoral dissertation, Université de Lorraine), 2016.
- Drgoña J, Tuor AR, Chandan V, Vrabie DL. Physics-informed neural networks for control-oriented modeling of nonlinear distributed parameter systems. *Control Engineering Practice*. 2021; 115:104886.
- Drgoña J, *et al.* Safe physics-informed machine learning for critical infrastructure optimal control: A comprehensive review. *Annual Reviews in Control*. 2025; 59:100-120.
- Fazlyab M, Morari M, Pappas GJ. Safety verification and robustness analysis of neural networks via semidefinite programming. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2019; 65(1):90-105.
- Girard-Satabin P, *et al.* Partitioning linear regions for scalable formal verification of neural networks. *Formal Methods in System Design*. 2021; 58(3):320-345.
- Goubault E, Putot S. Static analysis of neural networks using tropical polyhedra. *Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming*. 2021; 120:100656.
- Hu H, *et al.* Reach-SDP: Reachability analysis of closed-loop systems with neural network controllers via semidefinite programming. *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2020, 5938-5944.
- Khedher A, *et al.* Formal evaluation of robustness in safety-critical AI systems: A distributed perspective. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 2023.
- Korda M, Mezić I. Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Global observable selection and error bounds. *Automatica*. 2018; 93:149-160.
- Krstić M, *et al.* Accelerated backstepping boundary control using DeepONet for parabolic and hyperbolic PDEs. *Automatica*. 2024; 160:111450.
- Kwiatkowska M, Zhang L. Certification of deep neural networks: From theoretical bounds to practical guarantees. *Communications of the ACM*. 2023; 66(4):58-67.
- Ladner P, Althoff M. Polynomial zonotopes for exact reachability analysis of distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024.
- Lopez DM, *et al.* ARCH-COMP category report: Artificial intelligence and neural network control systems (AINNCS) for infinite-dimensional verification. *EPiC Series in Computing*. 2023; 96:110-135.
- Păsăreanu CS, *et al.* Verification of vision-based autonomous systems under spatial uncertainties. *International Journal of Robotics Research*. 2023; 42(1):102-120.
- Tran HD, *et al.* Star-based reachability analysis of deep neural networks. *Formal Methods in System Design*. 2021; 58:1-28.
- Vanspranghe N. Contributions to infinite-dimensional nonlinear control theory: Stability and robustness (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes), 2022.
- Wang S, Perdikaris P, Karniadakis GE. Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed neural networks. *Science Advances*. 2023; 7(40):eabi8605.
- Xiang W, Johnson TT. Reachability analysis and safety verification for neural network control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2018; 63(10):3248-3253.
- Yacoubi S. A survey of boundary control of infinite dimensional systems using linear matrix inequalities. *ESAIM: Proceedings and Surveys*. 2015; 50:131-155.
- Zhang Y, Xu J. Constrained hybrid zonotopes for verification of deep neural networks in process control. *Computers & Chemical Engineering*. 2023; 170:108115.
- Zhao P, *et al.* Robust optimization and verification of neural networks for renewable energy integration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024.
- Zhi Y, *et al.* Qualitative and quantitative safety verification for infinite-dimensional learning systems. *Journal of Machine Learning Research*. 2024; 25:1-45.
- Zhou Q, *et al.* Neural Lyapunov control and stability certificates for soft robotic systems. *IEEE Transactions on Robotics*, 2025.
- Zhu M, *et al.* Energy management for hybrid power plants under uncertainty: A Koopman model predictive control approach. *Applied Energy*. 2025; 330:120250.